"ZAHLEN

"Zahlen-Irrtum I":

Es gibt nur halb so viele gerade Zahlen (2, 4, 6, .)
wie Natürliche Zahlen (1, 2, 3, 4, .).

Beide Zahlenmengen enthalten genau gleich viele Zahlen.
Denn jeder Natürlichen Zahl können Sie genau eine gerade Zahl
und jeder geraden Zahl genau eine Natürliche Zahl zuordnen.
Das leuchtet Ihnen noch nicht ein?
Überzeugen Sie sich unter

Abzählbarkeit.

"Zahlen-Irrtum II":

Die Menge der Zahlen ist unendlich.

Noch größere Mengen kann es nicht geben, denn noch unendlicher

als unendlich geht ja wohl nicht.

Das geht durchaus, sogar auf unendlich viele Arten.

Wie Mathematiker darauf kommen, dass eine Menge unendlicher

ist als eine andere, und wie solche noch unendlicheren Mengen aussehen,

können Sie unter Kardinalzahlen nachlesen.

Kardinalzahlen, Zahlen zur Beschreibung der Mächtigkeit von Mengen.

Das Symbol Alef, der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets,

wurde von ►Georg Cantor als Symbol für

unendliche Kardinalzahlen eingeführt.

Die unendlichen Kardinalzahlen hängen eng zusammen mit

einem der größten Rätsel der Mathematik des 19. und 20. Jahrhunderts,

nämlich der ►Kontinuumshypothese.

Um zu verstehen, was es damit auf sich hat,

folgt hier eine kurze Schritt-für-

Schritt-Einführung in die Mengenlehre.

Nützlich ist es auch, den Artikel ►Abzählbarkeit gelesen zu haben.

Eine Menge ist eine gedankliche Zusammenfassung bestimmter Elemente,

wie etwa Zahlen.

Man schreibt Mengen in geschweiften Klammern,

die Menge der drei Zahlen 3, 4, 5 zum Beispiel schreibt man { 3, 4, 5 }.

Stellen Sie sich die Mengenklammern einfach wie eine Gedankenblase vor,

die die drei Elemente 3, 4, 5 zusammenhält.

Eine Menge kann endlich, aber auch unendlich viele Elemente enthalten.

In diesem Lexikon interessiert

natürlich vor allem letzteres.

Die Menge der Natürlichen Zahlen zum Beispiel ist unendlich (s. Abzählbarkeit).

Die unendliche Fortsetzung der Zahlen deuten wir mit drei Punkten . an:

Als Kardinalzahl oder Mächtigkeit einer Menge bezeichnet man

die Anzahl ihrer Elemente.

Als Eselsbrücke kann man sich vorstellen, dass Kardinäle umso mächtiger sind,

je größer die Menge ihrer Anhänger ist.

Die Menge { 3, 4, 5 } etwa hat drei Elemente und somit die Kardinalzahl 3.

Eine Teilmenge einer Menge ist eine Menge,

die irgendeine Auswahl der

Elemente dieser Menge enthält

– inklusive gar keinem oder allen.

Bei der Menge { 3, 4, 5 } gibt es also die acht möglichen Teilmengen { },

{ 3 }, { 4 }, { 5 }, { 3, 4 }, { 4, 5 }, { 3, 5 } und { 3, 4, 5 }.

Die Menge ohne Element { } nennt man 'leere Menge'.

Eine Menge mit der Kardinalzahl n hat genau 2n Teilmengen.

Denn es gibt genau 2n Möglichkeiten, eine Auswahl aus n Elementen zu treffen.

In unserem { 3, 4, 5 } Beispiel bekommen wir also 23 = 8 Teilmengen.

Zu jeder Menge lässt sich immer eine größere Menge konstruieren,

nämliche deren Potenzmenge.

Die Potenzmenge einer Menge ist

einfach die Menge

all ihrer möglichen Teilmengen.

Im { 3, 4, 5 } Beispiel ist die Potenzmenge also die folgende Menge:

{ { }, { 3 }, { 4 }, { 5 }, { 3, 4 }, { 4, 5 }, { 3, 5 }, { 3, 4, 5 } }.

Wenn eine Menge die Kardinalzahl n hat,

dann hat ihre Potenzmenge gemäß unserer obigen Überlegung die Kardinalzahl 2n.

Potenzmengen sind, wie man sieht, viel größer als ihre Ursprungsmengen

und haben viel höhere Kardinalzahlen.

Dies wird sich im Folgenden noch als bedeutsam herausstellen.

Soviel zur allgemeinen Mengenlehre.

Jetzt kommen wir zu Cantors unendlichen Mengen und ihren Alef-Zahlen.

Die Kardinalzahl der Menge der Natürlichen Zahlen bezeichnete

Cantor mit dem Symbol **א0** **(ausgesprochen: Alef-Null).**

Dies ist die wichtigste Kardinalzahl, denn alle abzählbaren Mengen

haben automatisch ebenfalls die Kardinalzahl א0,

da sie ja gleich viele Elemente wie die Menge der Natürlichen Zahlen enthalten.

In manchen mathematischen Darstellungen wird die Anzahl

der Natürlichen Zahlen auch als Naleph ("naives Aleph",

für die einfachste Art der Unendlichkeit) bezeichnet.

Cantor vermutete, dass Mengen noch 'höherer' Unendlichkeit

mit entsprechend größeren Kardinalzahlen existieren.

Die nächsthöhere mögliche Kardinalzahl nannte er folgerichtig א1 (Alef-Eins).

Je nachdem, wie viele Stufen der Unendlichkeit existieren,

gibt es weitere Alef-Zahlen א2, א3, א4 usw., von denen jede

größer ist als die vorhergehende und der nächsthöheren

Stufe der Unendlichkeit entspricht.

Zu welchen konkreten Mengen diese im Moment noch völlig

theoretischen Kardinalzahlen gehören können, wollen wir uns gleich überlegen.

Die Alef-Zahlen folgen seltsamen Rechenregeln,

die eine Folge ihrer Unendlichkeit sind.

Zum Beispiel gilt für jede unendliche Kardinalzahl א:

In Worten:

Wenn man einer unendlichen Menge ein Element hinzufügt,

ändert dies nichts an der Zahl der Elemente dieser Menge.

Unendlich plus eins gibt wieder unendlich.

Das gleiche gilt, wenn man zwei, drei, oder sogar

unendlich viele Elemente hinzufügt:

Warum das so ist, können wir beim Zurückblättern unter ►Abzählbarkeit sehen:

Wenn man beispielsweise zur Menge der geraden Zahlen

die Menge der ungeraden Zahlen hinzufügt,

also die Zahl ihrer Elemente und damit ihre Kardinalzahlen addiert,

erhält man die Menge der Natürlichen Zahlen.

Aber alle drei Mengen haben die gleiche Kardinalzahl,

da sie ja abzählbar sind, d.h. gleich viele Elemente wie die

Natürlichen Zahlen enthalten.

Also ändert das Verdoppeln einer unendlichen Menge nichts

an der Zahl ihrer Elemente, ebenso wenig wie das Verdreifachen

und sogar das Vervielfachen mit

einer beliebigen endlichen Zahl a:

Kühn geworden, wollen wir die Menge jetzt unendlich oft vervielfachen.

Wir ersetzen dazu jedes einzelne ihrer Elemente durch die komplette Menge.

Wie man sich überlegen kann, ist dies gleichbedeutend mit einer

Multiplikation ihrer Kardinalzahl mit sich selbst.

Doch wieder ändert dies nichts an der Zahl ihrer Elemente:

Das Äquivalent zu dieser Formel ist nichts anderes

als die Abzählbarkeit der Brüche.

Denn zu jeder Natürlichen Zahl n gibt es genauso viele Brüche,

wie Natürliche Zahlen existieren: n/1, n/2, n/3,. usw.

Folglich entspricht die Multiplikation der Kardinalzahl mit sich selbst

dem Übergang von der Menge der Natürlichen Zahlen zur Menge der Brüche.

Eine unendliche Menge enthält sogar beliebig oft mit sich selbst multipliziert

immer wieder gleich viele Elemente:

Jetzt stellt sich die nahe liegende Frage, ob denn etwa jede beliebige

Rechenoperation mit א immer wieder א ergibt?

Die Antwort: Nein, nicht jede. Denn Cantor zeigte:

2א ist noch größer als א!

Wir erinnern uns: 2א ist die Kardinalzahl der Potenzmenge

einer Menge mit der Kardinalzahl א.

Die Kardinalzahl einer Potenzmenge aber ist immer größer

als die Kardinalzahl der ursprünglichen Menge

- und wie Cantor bewies, gilt das sogar für unendliche Mengen.

Die Potenzmenge jeder unendlichen Menge ist

also noch 'unendlicher' als diese selbst.

Damit hatte Cantor bewiesen, dass es wirklich eine Folge

von Alef-Zahlen 2א ,1א ,0א, usw. gibt.

Denn da man zu jeder beliebigen

unendlichen Menge

immer eine Potenzmenge bilden kann und zu dieser dann

wiederum eine Potenzmenge, gibt es keine Obergrenze für die Alef-Zahlen.

Die Folge der Alefs und damit die Anzahl der verschiedenen

Unendlichkeiten ist selbst unendlich!

Außer der Menge der Natürlichen Zahlen mit ihrer Kardinalzahl 0א

kennen wir noch die Menge der Reellen Zahlen.

Das sind alle Zahlen mit einer beliebigen Zahl von Nachkommastellen.

Wir wissen, dass diese Menge nicht

abzählbar und damit 'unendlicher'

ist als die Menge der Natürlichen Zahlen.

Preisfrage:

Wie groß ist die Kardinalzahl der Menge der Reellen Zahlen?

Cantor zeigte, dass diese Kardinalzahl gerade 20א ist,

also identisch mit der Kardinalzahl der Potenzmenge der Natürlichen Zahlen.

Das kann man sich mit folgender Überlegung verdeutlichen:

Die Potenzmenge der Natürlichen Zahlen enthält alle denkbaren

Teilmengen mit jeweils höchstens abzählbar unendlich vielen Zahlen.

Die Menge der Reellen Zahlen enthält alle denkbaren Zahlen mit jeweils höchstens abzählbar unendlich vielen Nachkommastellen.

Beide Mengen sind also vergleichbar in der Zahl ihrer Elemente.

Wir haben also jetzt zwei unendliche Kardinalzahlen gefunden,

die zu konkreten Mengen gehören, nämlich 0א

- die kleinste Alef-Zahl und zugleich die Kardinalzahl

der Menge der Natürlichen Zahlen

- und 20א, die Kardinalzahl der Menge der Reellen Zahlen.

Zum Abschluss dieses

Kardinalzahlen-Exkurses

stellt sich die nahe liegende Frage, ob 20א denn

die zweitkleinste mögliche unendliche Kardinalzahl ist, ob also gilt:

Oder gibt es noch irgendeine unendliche Menge,

deren Kardinalzahl zwar größer ist als 0א, aber kleiner als 20א?

Diese scheinbar einfache Frage hatte dramatische Konsequenzen

für Georg Cantor selbst und für die Mathematik des 20. Jahrhunderts.

Die Antwort ist überraschend. Sie finden sie unter ►Kontinuumshypothese.

© jcl 2007

Kontinuumshypothese, die Vermutung des Mathematikers Georg Cantor,

dass die Unendlichkeit der ►Reellen Zahlen nach der Unendlichkeit

der Natürlichen Zahlen die zweitkleinste Unendlichkeit ist.

Als Gleichung ausgedrückt:

Was es mit dieser Gleichung und den seltsamen Symbolen auf sich hat,

finden Sie unter ►Kardinalzahlen näher erklärt.

Wie man in ►Cantors Biographie

nachlesen kann,

scheiterte er dramatisch am Beweis der Kontinuumshypothese

und bezahlte dafür einen hohen Preis.

Seine Kontinuumshypothese wurde Anfang des 20. Jahrhunderts

zu einem der bekanntesten ungelösten Probleme der Mathematik.

Viele Mathematiker bissen sich daran die Zähne aus. Zumindest bis 1930.

In diesem Jahr bewies der Logiker Kurt Gödel seinen Unvollständigkeitssatz*.

Jedes ausreichend komplexe widerspruchsfreie Aussagensystem,

so der Satz, ist unvollständig.

Das heißt, in einem solchen System gibt es Aussagen,

die sich mit den Mitteln des Systems weder beweisen noch widerlegen lassen.

Dies ist analog zu dem unter ►Wahrheit angeführten Beweis,

dass es keine universelle Wahrheitsmaschine geben kann.

Der Unvollständigkeitssatz gilt insbesondere für die Mathematik

und natürlich auch für das System der Mengenlehre.

Alle Mathematik ist unvollständig.

Gödel bewies diesen Satz auf abstrakte Weise,

also ohne ein konkretes Beispiel für eine solche prinzipiell

unbeweisbare Aussage zu kennen.

Es lag nun nahe, sich der ungelösten Probleme der Mathematik anzunehmen

und zu untersuchen, ob vielleicht eines dieser Probleme

eine solche Aussage enthält. Genau das tat Gödel.

Sein erster Verdächtiger war die Kontinuumshypothese.

1937 gelang es ihm zu beweisen, dass sich die Kontinuumshypothese

im Rahmen der Mengenlehre nicht widerlegen lässt.

Sie ist also mit allen Sätzen der Mengenlehre vereinbar.

Das heißt noch nicht, dass sie

bewiesen ist.

Dazu müsste man zusätzlich nachweisen,

dass ihr Gegenteil mit den Sätzen der Mengenlehre nicht vereinbar ist.

Gödel kam mit der Kontinuumshypothese nicht weiter.

Erst 1963 konnte Paul Cohen nachweisen,

dass auch ihr Gegenteil widerspruchsfrei zur Mengenlehre ist.

Die Kontinuumshypothese ist damit im System der klassischen

Mengenlehre unentscheidbar - weder wahr noch falsch.

Sie ist eines der ersten konkreten Beispiele für Gödels Unvollständigkeitssatz.

Cantor hatte also mit all seinen

Beweisversuchen im

19. Jahrhundert nie eine Chance.

Die dritte Stufe der Unendlichkeit:

Inzwischen überlegen sich Mathematiker,

durch eine sinnvolle Erweiterung der Mengenlehre

die Kontinuumshypothese entscheidbar zu machen.

Man ist jedoch davon abgekommen, sie in Cantors

ursprünglicher Version aufzunehmen.

Cohen ist sich mit vielen Mathematikern einig, dass die Menge

der Reellen Zahlen dermaßen groß

ist, dass sie eigentlich nicht

die zweitkleinste Unendlichkeit darstellen kann.

Also sollte die Kardinalzahl des Kontinuums größer sein als 1א,

um eine vernünftig handhabbare Mengenlehre zu erhalten. I

n der weiteren Entwicklung der Mengenlehre tendiert

man daher mittlerweile zu der Aussage

was natürlich sofort die Frage aufwirft,

welcher Menge denn dann die zweite Stufe der Unendlichkeit,

also die Kardinalzahl 1א entspricht...

* Die für Nichtmathematiker am

besten verständliche Version

des etwas länglichen Beweises finden Sie in "Gödel, Escher, Bach"

von Douglas Hofstadter (s. Literaturverzeichnis).

© jcl 2007 ■ Unendlichkeit ■ Bücher ■ Links ■ Forum

Aus :http://unendliches.net/